NOTA	

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables.
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota$=1+\frac{Puntos}{10}$. **Duración**= 60 minutos

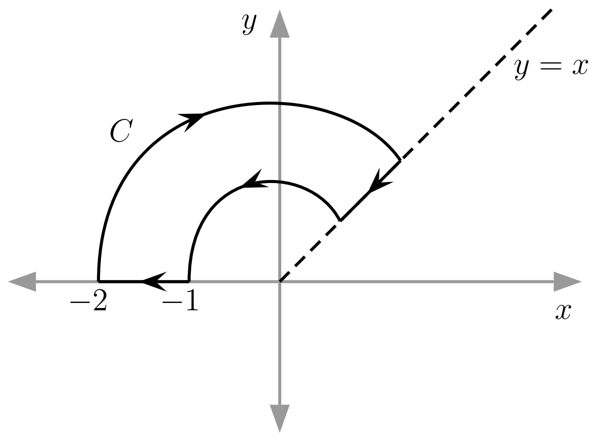
CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

1) **[20 pts.]** Calcular

$$\int_C \left(\arctan(x) + \frac{3y^2}{2}\right)\, dx + \left(e^{y^2} - \frac{3x^2}{2}\right)\, dy$$

donde C es el borde de la porción del anillo $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ que se ilustra acontinuación



2) **[20 pts.]** Sea S es la superficie acotada por los planos $z = 4 - y$, $z = 0$, $x = 0$, $x = 6$ y $y = 0$, orientada por un vector normal unitario dirigido hacia el exterior.

   a) **[5 pts.]** Grafique S.

   b) **[15 pts.]** Calcular $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (xe^{3z} + \sqrt[5]{yz})\,\mathbf{i} + (ye^{3z} + 3\sec(x))\,\mathbf{j} + \frac{e^{3z}}{3}\,\mathbf{k}$$

3) **[20 pts.]** Sea S la superficie dada por $z = x^2$, $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 2$ orientada por un vector normal unitario dirigido hacia abajo.

   a) **[5 pts.]** Encuentre la ecuación del plano tangente a S en el punto $(1, 1, 1)$.

   b) **[15 pts.]** Use el teorema de Stokes para calcular $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xyz\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ y C es el borde de la superficie S.

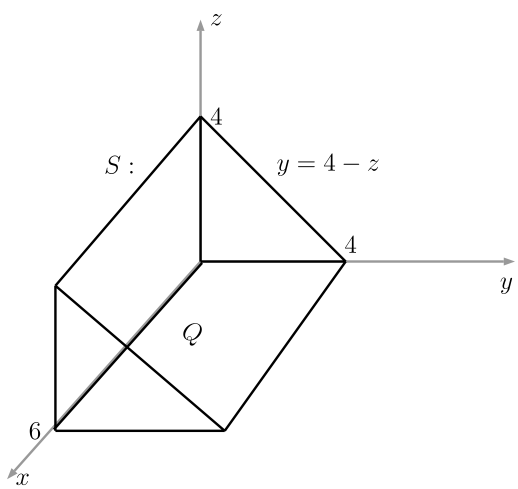
PAUTA

1) Sea R la región encerrada por la curva C y pongamos $M = \arctan(x) + \dfrac{3y^2}{2}$ y $N = e^{y^2} - \dfrac{3x^2}{2}$. Note que, a pesar que la curva C es cerrada, no podemos usar directamente Green, pues C está orientada en sentido horario. Sin embargo, sabemos que

$$
\begin{aligned}
\int_C M\,dx + N\,dy &= -\int_{-C} M\,dx + N\,dy \\
&\overset{\text{Green}}{=} -\iint_R (-3x-3y)\,dA \qquad \color{red}{(6 \text{ pts.})} \\
&= 3\int_{\pi/4}^{\pi}\int_1^2 (r\cos\theta + r\sin\theta) r\,dr d\theta \qquad \color{red}{(6 \text{ pts.})} \\
&= 3\int_{\pi/4}^{\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\frac{r^3}{3}\Big|_1^2 \,d\theta \qquad \color{red}{(2 \text{ pts.})} \\
&= 3\cdot\frac{7}{3}\int_{\pi/4}^{\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta \qquad \color{red}{(2 \text{ pts.})} \\
&= 7\,(\sin\theta - \cos\theta)\Big|_{\pi/4}^{\pi} \qquad \color{red}{(2 \text{ pts.})} \\
&= 7(1-0) \\
&= 7 \qquad \color{red}{(2 \text{ pts.})}
\end{aligned}
$$

(Se descuentan 3 puntos por no considerar la orientación en el teorema de Green)

2) La gráfica de S es la siguiente



(5 pts.)

Usando el teorema de la divergencia, tenemos que

$$\begin{aligned}
\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS &= \iiint_Q \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV \\
&= 3\iiint_Q e^{3z}\,dV \qquad \text{(3 pts.)} \\
&= 3\int_0^6\int_0^4\int_0^{4-y} e^{3z}\,dzdydx \qquad \text{(3 pts.)} \\
&= \int_0^6\int_0^4 (e^{12-3y}-1)\,dydx \qquad \text{(3 pts.)} \\
&= \int_0^6 \left(\frac{e^{12}}{3}-\frac{13}{3}\right)dx \qquad \text{(3 pts.)} \\
&= 6\left(\frac{e^{12}}{3}-\frac{13}{3}\right) \\
&= 2\,(e^{12}-13) \qquad \text{(3 pts.)}
\end{aligned}$$

3)

a) Note que, una parametrización para S viene dada por $r(x,y)=\langle x,y,x^2\rangle$ con $(x,y)\in R=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le 2\}$. El vector normal del plano tangente en un punto arbitrario de S viene dado por

$$r_x\times r_y=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2x\end{vmatrix}=\langle 2x,0,-1\rangle \qquad \text{(2 pts.)}$$

Entonces, el vector normal en $(1,1,1)$ es $\langle 2,0,-1\rangle$ (1 pts.). Así, la ecuación del plano tangente a S en el punto $(1,1,1)$ es

$$2(x-1)+0(y-1)+(-1)(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-z=1 \qquad \text{(2 pts.)}$$

b) Como S está orientada de tal forma que C es orientada de forma positiva, entonces podemos usar directamente el teorema de Stokes para calcular la integral de línea sobre C. Notemos que

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xyz & y & z\end{vmatrix}=\langle 0,xy,-xz\rangle \qquad \text{(3 pts.)}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot\, dr &= \iint_S (\text{rot }\mathbf{F})\cdot \mathbf{N}\, dS \\
&= \iint_R \langle 0, xy, -xz\rangle \cdot \langle 2x, 0, -1\rangle\, dA \qquad \text{(5 pts.)} \\
&= \iint_R xz\, dA \\
&= \iint_R x^3\, dA \qquad \text{(2 pts.)} \\
&= \int_0^2 \int_0^2 x^3\, dxdy \\
&= 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 \\
&= 8 \qquad \text{(5 pts.)}
\end{aligned}$$